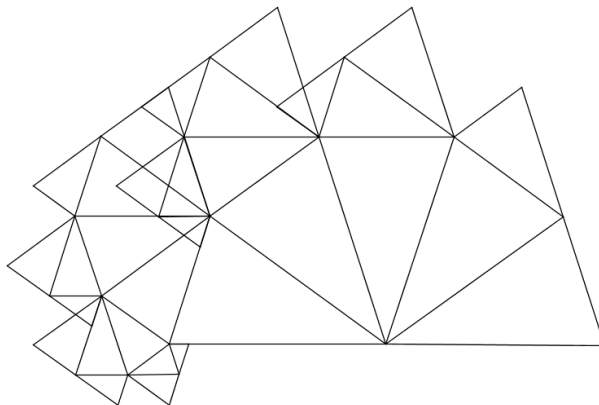


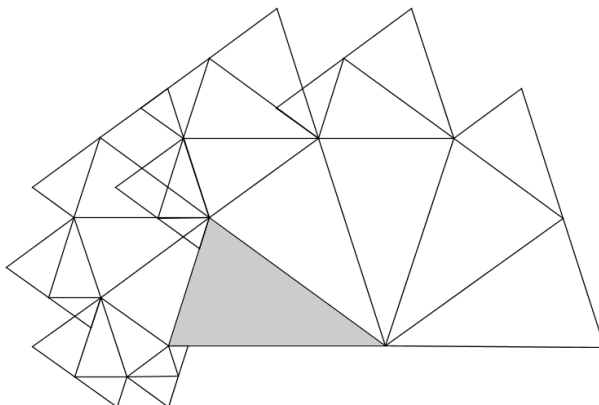
Aufgaben zum Modul *Recursive Images*

Koordinaten berechnen

Aufgabe 1: Starte das Modul *Recursive Images* und zeichne das folgende Bild:



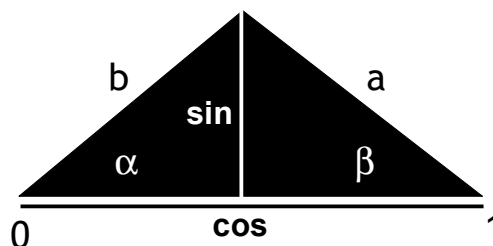
Lösung: Zeichne ein Basis-Dreieck, dessen Proportionen dem grauen Dreieck in der unteren Skizze entsprechen. Der linke Winkel ist dabei $180/5^\circ$, der rechte $360/5^\circ$.



Aufgabe 2: Berechne die Koordinaten der Spitze des Basis-Dreiecks unter der Annahme, dass die Basis-Seite die Länge eins hat.

Lösung:

„In einem Dreieck mit Basislänge 1 sind zwei Dinge gleich und zwei Dinge sind gleich eins.“



Gleich sind:

$$a \sin(\beta) = b \sin(\alpha)$$

Gleich eins sind:

$$a \cos(\beta) + b \cos(\alpha) = 1$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$a = b \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$

Setzt man a in die zweite Gleichung ein erhält man:

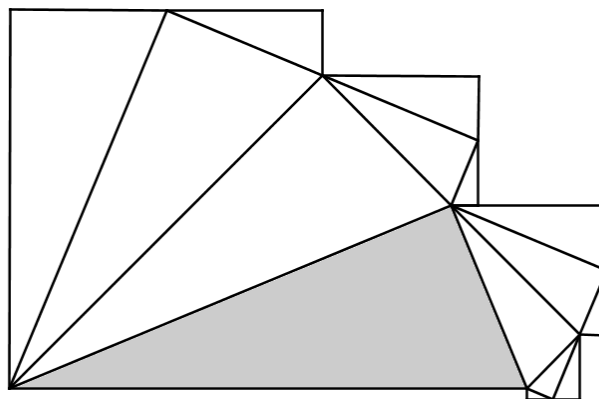
$$b = \frac{1}{\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \cos(\beta) + \cos(\alpha)}$$

Da im Bild von Aufgabe 1 $\alpha = 2\pi/5$ ist, sind die gesuchten Koordinaten der Dreiecks-Spitze:

$$(b \cos(2\pi/5) , b \sin(2\pi/5))$$

Dies lässt sich übrigens mit dem Modul *Recursive Images* leicht überprüfen.

Aufgabe 3: Berechne die Koordinaten der Dreiecksspitze im folgenden Bild:



Lösung: Die beiden Winkel betragen in diesem Fall $\pi/8$ und $3\pi/8$. (Der Winkel in der Dreiecksspitze ist also $\pi/2$, darum folgt das erzeugte Bild einer für rechtwinklige Dreiecksspitzen typischen Regelmäßigkeit.) Die Koordinaten berechnen sich nach der gleichen Formel wie in Aufgabe 2.

Zusatz-Aufgabe: Berechne die Anzahl der Linien (l_i) und Flächen (f_i) in Abhängigkeit von der Anzahl Linien in der Grundform (l_0) und der Iterationstiefe (d).

Lösung: In jedem Iterationsschritt werden alle Linien ersetzt durch die Grundform. Das bedeutet: Die Anzahl Linien und die Anzahl Flächen wird in jedem Schritt multipliziert mit der Anzahl Linien der Grundform.

$$l_i = \sum_{d=0}^{d=i} l_0^d \quad f_i = \sum_{d=0}^{d=i} f_0^d$$

Die Komplexe Multiplikation

Frage 1: Was versteht man unter einer *komplexen Zahl*?

Antwort: Unter einer *komplexen Zahl* versteht man eine Zahl mit *Realteil* und *Imaginärteil*.

Frage 2: Wie ist die *Imaginäre Einheit* i definiert?

Antwort: Die *Imaginäre Einheit* i ist definiert als Quadratwurzel aus minus 1:

$$i = \sqrt{-1}$$

Frage 3: Was versteht man unter der *Gaußschen Ebene*?

Antwort: Üblicherweise bezeichnet man die geläufige geometrische Darstellung der komplexen Zahlen als die *Gaußsche Ebene*, obwohl Carl Friedrich Gauß nicht der erste war, der für die komplexen Zahlen eine geometrische Beschreibung verwendete. Die Gaußsche Ebene ist eine gewöhnliche Euklidische Ebene mit den üblichen kartesischen Koordinaten x und y , wobei x den horizontalen Abstand bezeichnet (positiv nach rechts, negativ nach links) und y den vertikalen Abstand (positiv nach oben, negativ nach unten). Die komplexe Zahl

$$z = x + y*i$$

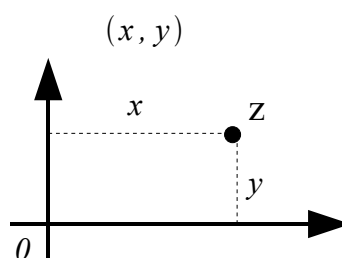
wird auf der Gaußschen Ebene durch den Punkt mit den Koordinaten

$$(x, y)$$

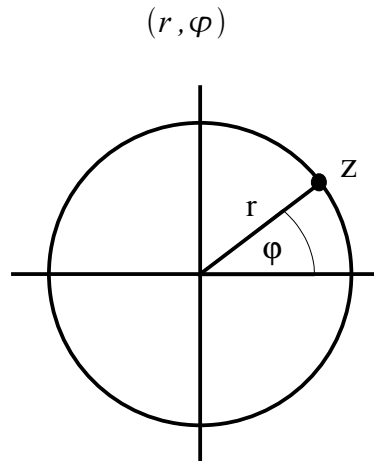
dargestellt.

Frage 4: Welches sind die beiden geläufigsten Möglichkeiten, die Position eines Punktes in der Ebene eindeutig zu identifizieren?

Antwort: Eine Möglichkeit ist die Darstellung in orthogonalen *kartesischen Koordinaten*. (Als Koordinaten eignen auch zwei beliebige linear unabhängige Vektoren).



Eine andere Möglichkeit ist die Darstellung in *Polarkoordinaten*.



Die Koordinate r , eine Länge, wird als Radius, die Winkelkoordinate φ als Azimut bezeichnet.

Frage 5: Wie lässt sich ein Punkt (r, φ) in Polarkoordinaten umrechnen in kartesische Koordinaten?

Antwort:

$$\begin{aligned} x &= r * \cos(\varphi) \\ y &= r * \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Frage 6: Für welche komplexe Zahl $z = x + iy$ steht der Ausdruck $e^{i\varphi}$?

Antwort:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i * \sin(\varphi)$$

Frage 7: Wie werden zwei Komplexe Zahlen $a + b * i$ und $c + d * i$ addiert?

Antwort:

$$(a + c) + (b + d) * i$$

Frage 8: Wie werden zwei Komplexe Zahlen $a + b * i$ und $c + d * i$ multipliziert?

Antwort:

$$\begin{aligned} &(a + b * i) * (c + d * i) \\ &ac + bc * i + ad * i + bd * i^2 \\ &ac + bc * i + ad * i - bd \\ &(ac - bd) + (bc + ad) * i \end{aligned}$$

Frage 9: Wie kann man zeigen, dass sich bei der Multiplikation von zwei komplexen Zahlen die Winkel addieren?

Tip: Benutze die trigonometrischen Formeln:

$$\begin{aligned}\sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B\end{aligned}$$

Antwort:

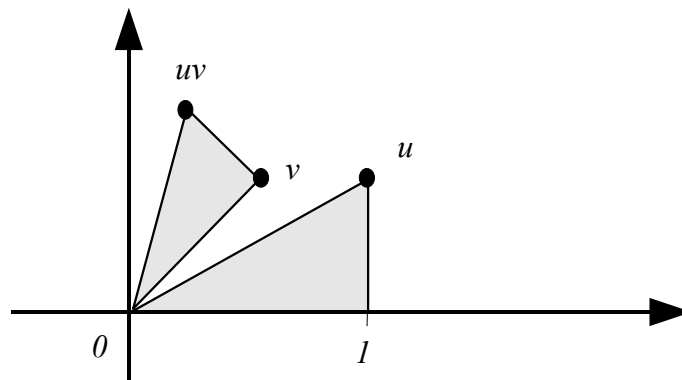
$$\begin{aligned}e^{iA} e^{iB} &= (\cos A + i \sin A) * (\cos B + i \sin B) \\ e^{iA} e^{iB} &= (\cos A \cos B - \sin A \sin B) + i * (\sin A \cos B + \cos A \sin B) \\ e^{iA} e^{iB} &= \cos(A+B) + i \sin(A+B)\end{aligned}$$

Frage 9: Wie kann man zeigen, dass sich bei der Multiplikation von zwei komplexen Zahlen die Radien multiplizieren?

Antwort:

$$r_1 e^{iA} r_2 e^{iB} = r_1 r_2 e^{iA} e^{iB}$$

Frage 10: Wie kann man zeigen, dass sich bei der Multiplikation von zwei komplexen Zahlen u und v die beiden Dreiecke, die aufgespannt werden durch die Punkte $(0, 1, u)$ und $(0, v, uv)$ ähnlich sind?



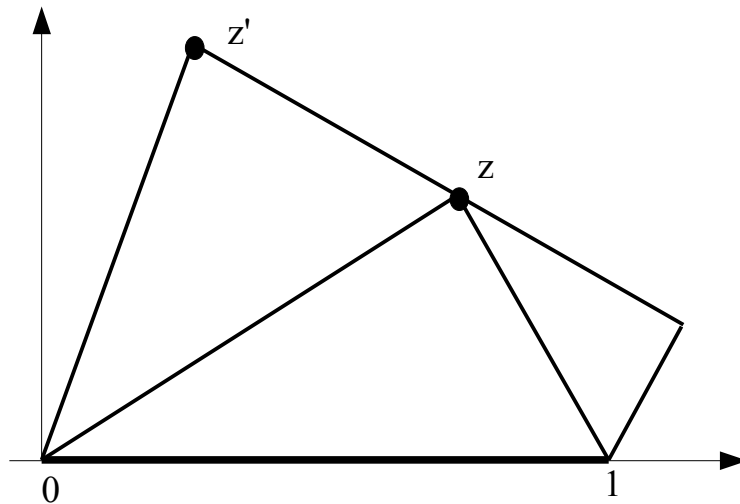
Antwort:

Da bei der Multiplikation von zwei komplexen Zahlen die Radien multipliziert werden, entspricht die Länge der Strecke $(0, uv)$ dem Produkt der Längen $(0, u) * (0, v)$. Die Strecke $(0, uv)$ ist also um die Länge von $(0, v)$ länger als $(0, u)$. Um denselben Faktor länger als 1 ist die Strecke $(0, v)$.

Da bei der Multiplikation von zwei komplexen Zahlen die Winkel addiert werden, entspricht der Winkel $(0, v, uv)$ dem Winkel $(0, 1, u)$.

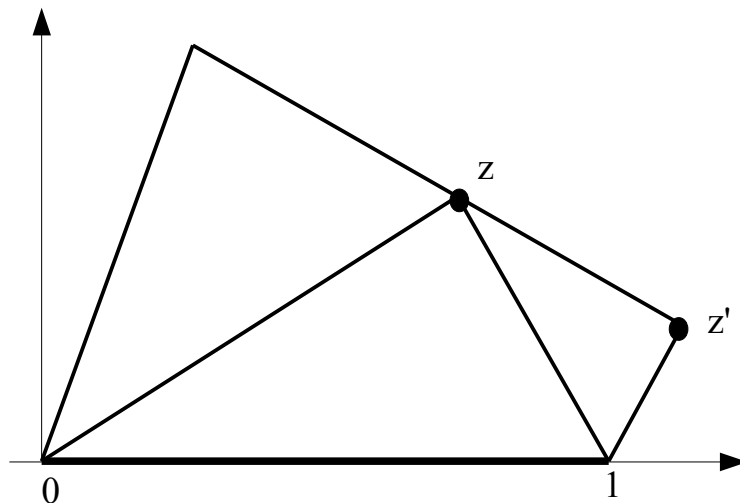
Die Dreiecke $(0, 1, u)$ und $(0, v, uv)$ haben also zwei Seiten mit gleichen Verhältnissen und der Winkel dazwischen ist ebenfalls gleich. Daher sind die beiden Dreiecke ähnlich.

Frage 11: Wie kann man zeigen, dass in der folgenden Skizze der Punkt z' interpretiert als komplexe Zahl, dem Quadrat der komplexen Zahl z entspricht?
 Voraussetzung: Die Skizze wurde erzeugt mit dem Modul *Recursive Images*, das heisst alle drei Dreiecke sind ähnlich.



Antwort: Dass $z' = z^2$ folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass die beiden Dreiecke $(0, 1, z)$ und $(0, z, z')$ ähnlich sind (siehe Frage 10). Mit dem Modul *Recursive Images* lässt sich das auch einfach nachprüfen: $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

Frage 12: Welcher komplexen Zahl entspricht der Punkt z' in der folgenden Skizze?



Antwort: Würde man die gesamte Konstruktion horizontal, um eins nach links verschieben und an der vertikalen Achse spiegeln, so entspräche z' wieder dem Quadrat von z . Mathematisch bedeutet eine Verschiebung eines Punktes einer Addition. Spiegelt man einen Punkt an der vertikalen Achse, wird einfach der Realteil der Zahl mit einem negativen Vorzeichen versehen. Um z' zu berechnen kann man also zunächst z verschieben und spiegeln, dann quadrieren und anschliessend das Resultat zurück spiegeln und verschieben:

$$\begin{aligned} (- (a - 1) + bi)^2 &= (a^2 - b^2 - 2a + 1) + (2b - 2ab)i \\ z' &= (1 + b^2 - a^2 + 2a - 1) + (2b - 2ab)i \end{aligned}$$